数理解析研究所講究録
第 816 巻 1992 年 71-81

CRYSTAL BASE AND q–VERTEX OPERATORS

大阪大学基礎工学部　伊達 悦朗　(Etsuro Date)
京都大学理学部　神保 道夫　(Michio Jimbo)
大阪大学基礎工学部　尾角 正人　(Masato Okado)

Frenkel と Reshetikhin は [1] において共形場理論における vertex operator の q–deformation を考察し、その n 点関数が holonomic な q 差分方程式系（KZ 方程式の q アナログ）の解になっていることを示した。また、解の接続係数として現れる擬定数が、face 型の Yang–Baxter 方程式を満足していることを示し、最も簡単な場合が Andrews–Baxter–Forrester の模型に対応していることを見い出した。

一方 [2] では、crystal base の理論を駆使して、アフィンリー環に対応する量子展開環の既約最高ウェイト表現の基底が path という概念を用いて記述されることが証明されている。その結果として vertex 模型における 1D sum が string function になることも示される。

ここでは、以上の 2 つの仕事を復習し、これらを結合することによって face 模型における 1D sum が既約最高ウェイト表現の指標の分岐係数で与えられることを示す [3]。

1. q–vertex operator

まず、記号を整理しよう。アフィンリー環の記号は基本的に Kac の教科書 [4] に従う。$\mathfrak{g}$ をランク l の $\mathbf{Q}$ 上のアフィンリー環とし、$\alpha_i\,(i=0,\cdots,l)$ を simple root とする。$P=\mathbf{Z}\Lambda_0\oplus\cdots\oplus\mathbf{Z}\Lambda_l\oplus\mathbf{Z}\delta$ を weight lattice とするとき、dual lattice は $P^*=\mathbf{Z}h_0\oplus\cdots\oplus\mathbf{Z}h_l\oplus\mathbf{Z}d$ である。（$\langle\delta,d\rangle=a_0$ であるので、もし $a_0\neq 1$ のときはディンキン図形の頂点の番号付けを反対にする。）P 上の invariant bilinear form $(\,|\,)$ の正規化も [4] に従う。（i.e. $(\theta|\theta)=2,\theta=\delta-\alpha_0$）。[2,3] では、異なる正規化 $(\,,\,)$ を用いている。互いの関係は、$(\lambda,\mu)=r(\lambda|\mu)/2$ である。（r は $\mathfrak{g}$ の双対カッツムーディ代数 $\mathfrak{g}^\vee$ のティア数。）$k\in\mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対し、P_k をレベル k の dominant integral weight の集合とする。不定元 q に対し $\mathfrak{g}$ に対応する量子展開環 $U_q(\mathfrak{g})$（$\mathbf{Q}(q)$ 代数）が次のような生成元と関係式により定義される。

生成元： $e_i,f_i(i=0,\cdots,l),q^h(h\in P^*)$.

関係式：
$$q^0=1,\quad q^hq^{h'}=q^{h+h'},$$
$$q^he_iq^{-h}=q^{\langle h,\alpha_i\rangle}e_i,\quad q^hf_iq^{-h}=q^{-\langle h,\alpha_i\rangle}f_i,$$
$$[e_i,f_j]=\delta_{ij}\frac{t_i-t_i^{-1}}{q_i-q_i^{-1}},$$
$$\sum_{n=0}^{b}(-)^ne_i^{(n)}e_je_i^{(b-n)}=\sum_{n=0}^{b}(-)^nf_i^{(n)}f_jf_i^{(b-n)}=0\quad(i\neq j).$$

ここで、$q_i=q^{(\alpha_i,\alpha_i)},t_i=q^{(\alpha_i,\alpha_i)h_i},b=1-\langle h_i,\alpha_j\rangle,[n]_i=(q_i^n-q_i^{-n})/(q_i-q_i^{-1}),[n]_i!=\prod_{k=1}^n[k]_i,e_i^{(n)}=e_i^n/[n]_i!,f_i^{(n)}=f_i^n/[n]_i!$.
$U_q(\mathfrak{g})$ にホップ代数の構造が入ることはよく知られているが、ここで重要なのは余積 Δ のとり方である。Δ は次のようにとる。

$$\Delta(e_i)=e_i\otimes 1+t_i\otimes e_i$$
$$\Delta(f_i)=f_i\otimes t_i^{-1}+1\otimes f_i$$
$$\Delta(q^h)=q^h\otimes q^h$$

事実、この余積をとらないと 4 章で述べる 補題（q–vertex operator の crystal lattice の保存性）は成立しない。

さて、記号の導入を続ける。$U_q(\mathfrak{g})$ には、q^d という元が含まれているが、これを $U_q(\mathfrak{g})$ から省いた代数、すなわち、$e_i, f_i, q^{h_i}(i=0,\cdots,l)$ のみから生成される $U_q(\mathfrak{g})$ の部分代数を $U_q'(\mathfrak{g})$ とする。以下、$\mathfrak{g}$ を固定して話をするので、$U=U_q(\mathfrak{g}), U'=U_q'(\mathfrak{g})$ と略記する。

次は表現に関係する記号の説明。$\lambda \in P_k$ に対し $V(\lambda)$ は λ を最高ウェイトとする既約最高ウェイト表現とし、$|\lambda\rangle$ をその最高ウェイトベクトルとする。

U'–module のウェイトについて説明する。U' は q^d を含んでいないので、δ を count することはできない。そこで、cl を $P \longrightarrow P/\mathbf{Z}\delta$ の canonical map とし $P_{cl}=cl(P)$ とおく。U'–module のウェイトは P_{cl} の元になる。次に、$P/\mathbf{Z}\delta \longrightarrow P$ の $\mathbf{Z}$–linear map af を $af(cl(\alpha_i))=\alpha_i(i\neq 0), af(cl(\Lambda_0))=\Lambda_0$ となるように固定する。このとき、$cl\circ af=id, af(cl(\alpha_0))=\alpha_0-\delta$ である。さて、有限次元の U'–module V が与えられたとしよう。すると、$V_z=\mathbf{Q}(q)[z,z^{-1}]\otimes V$ に U–module の構造が次のように入る。

$$
\begin{aligned}
&e_i(z^n\otimes v)=z^{\delta_{i0}+n}\otimes e_iv, \quad f_i(z^n\otimes v)=z^{-\delta_{i0}+n}\otimes f_iv\\
&\mathrm{wt}\,(z^n\otimes v)=n\delta+af(\mathrm{wt}\,v)
\end{aligned}
$$

ウェイト $\lambda,\mu\in P_k$, 有限次元 U'–module V が与えられている時、次の U–module としての intertwiner を考える。

$$\tilde{\Phi}(z): V(\lambda)\longrightarrow V(\mu)\widehat{\otimes}V_z$$

ここで、完備化 $\widehat{\otimes}$ の意味は

$$M\widehat{\otimes}N=\bigoplus_{\nu}\prod_{\xi}M_\xi\otimes N_{\nu-\xi}$$

である。もっと具体的には、$V(\lambda)$ のウェイトベクトル v に対し、

$$\tilde{\Phi}(z)v=\sum_{j,n}\Phi_{jn}v\otimes v_jz^{-n}\quad \{v_j\}\text{は } V \text{ のウェイト基底}$$

と書けるという意味である。$V(\mu)$ のウェイトが δ に関し上に有界であることから n の和は上に有界となる。この intertwiner に z の分数巾を補正し、q–vertex operator (qVO) の定義とする。

$$\Phi(z) = z^{\Delta_\mu - \Delta_\lambda}\tilde{\Phi}(z) \qquad \Delta_\lambda = \frac{(\lambda \mid \lambda + 2\rho)}{2(k + h^\vee)} = \frac{(\lambda, \lambda + 2\rho)}{r(k + h^\vee)}$$

ここで、$\rho = \sum_{i=0}^{l} \Lambda_i$, $h^\vee$ は dual Coxeter number である。qVO の存在について次のことが知られている。

定理（qVO の存在） [3].

$$\begin{aligned} Hom_U(V(\lambda), V(\mu)\widehat{\otimes}V_z) \simeq &\{v \in V \mid wt\, v = cl(\lambda - \mu), e_i^{\langle h_i, \mu\rangle + 1} v = 0\ \forall i\} \\ \tilde{\Phi}(z) \mapsto v \quad &s.t.\ \tilde{\Phi}(z)|\lambda\rangle = |\mu\rangle \otimes v + \cdots \end{aligned}$$

この v を leading term と呼ぶ。特に qVO の空間は有限次元である。

以下、簡単のため V の weight multiplicity (P_{cl} についての) は高々 1 であるとする。このとき、λ, μ, V を固定すれば、qVO が存在してもその空間は 1 次元なので、適当に正規化し、それを $\Phi_\lambda^\mu(z)$ と書くことにする。そして、この $\Phi_\lambda^\mu(z)$ が存在する時、P_k の元の pair (μ, λ) は *admissible* であるという。

2. vertex–face 対応

以下、有限次元 U'–module V を固定する。次の U–module 達の intertwiner を考える。

$$\check{R}(z_1/z_2) : V_{z_1} \otimes V_{z_2} \longrightarrow V_{z_2} \otimes V_{z_1}$$

このような intertwiner の存在は universal R matrix $\mathcal{R}$ の存在と、その image $\left(\pi_{V_{z_1}} \otimes \pi_{V_{z_2}}\right)(\mathcal{R})$ が意味をもつ、ということから導かれる。（この $\check{R}(z)$ の正規化については [3] を参照）この時 admissible な $(\mu_1, \mu_0), (\mu_2, \mu_1)$ に対し、次のような等式が期待される。

$$\begin{aligned}&\check{R}(z_1/z_2)\Phi_{\mu_1}^{\mu_2}(z_1)\Phi_{\mu_0}^{\mu_1}(z_2)\\ &\qquad = \sum_{\mu_1' \in P_k} \Phi_{\mu_1'}^{\mu_2}(z_2)\Phi_{\mu_0}^{\mu_1'}(z_1) C\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 \\ \mu_1' & \mu_2 \end{pmatrix}(z_1/z_2) \qquad (*)\end{aligned}$$

これは、$\check{R}(z_1/z_2)\Phi_{\mu_1}^{\mu_2}(z_1)\Phi_{\mu_0}^{\mu_1}(z_2)$ が $V(\mu_0)$ から $V(\mu_2)\widehat{\otimes}V_{z_2}\widehat{\otimes}V_{z_1}$ への intertwiner であり、$\{\Phi_{\mu_1'}^{\mu_2}(z_2)\Phi_{\mu_0}^{\mu_1'}(z_1) \mid \mu_1' \in P_k, (\mu_2, \mu_1'), (\mu_1', \mu_0) :$ admissible$\}$ がその intertwiner の空間の base になっている [1] ことからの帰結である。$(*)$ の両辺の真空期待値をとろう。

$$\begin{aligned}&\check{R}(z_1/z_2)\langle \mu_2|\Phi_{\mu_1}^{\mu_2}(z_1)\Phi_{\mu_0}^{\mu_1}(z_2)|\mu_0\rangle\\ &\qquad = \sum_{\mu_1' \in P_k} \langle \mu_2|\Phi_{\mu_1'}^{\mu_2}(z_2)\Phi_{\mu_0}^{\mu_1'}(z_1)|\mu_0\rangle C\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 \\ \mu_1' & \mu_2 \end{pmatrix}(z_1/z_2) \quad (\sharp)\end{aligned}$$

ここで、$\langle \mu_2|\Phi_{\mu_1}^{\mu_2}(z_1)\Phi_{\mu_0}^{\mu_1}(z_2)|\mu_0\rangle$ は $\Phi_{\mu_1}^{\mu_2}(z_1)\Phi_{\mu_0}^{\mu_1}(z_2)|\mu_0\rangle$ の $|\mu_2\rangle$ の係数であり、$V \otimes V$ に値をとる。Δ_λ 達からくる分数巾を除いて、左辺は z_2/z_1 の、右辺は z_1/z_2 の級数になっている。ここで、$q \in \mathbf{C}^\times, |q| < 1$ とする。[1] で示されたことは、$(\sharp)$ の両辺が同じ holonomic な q–差分方程式の解となっており、$C\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 \\ \mu_1' & \mu_2 \end{pmatrix}(z_1/z_2)$ が $|z_2| \ll |z_1|$ での解と $|z_1| \ll |z_2|$ での解を結ぶ接続行列になっているということである。微分方程式の場合、接続行列は定数行列であるが、今の場合、成分は擬

定数 (pseudo constant) となる, i.e. $C(pz)=C(z)$ $(p=q^{2(k+h^\vee)})$. $z=e^{2\pi iu}$ とおくと $C(z)$ は u の関数として 2 重周期性をもつことになるので、楕円テータ関数で表示されることになる。さらに肝心な点は、この $C(z)$ が face 型の Yang–Baxter 方程式

$$\begin{aligned}&\sum_{\nu} C\begin{pmatrix}\mu_6 & \nu\\ \mu_5 & \mu_4\end{pmatrix}(z_1)\, C\begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_2\\ \mu_6 & \nu\end{pmatrix}(z_1z_2)\, C\begin{pmatrix}\mu_2 & \mu_3\\ \nu & \mu_4\end{pmatrix}(z_2)\\ =&\sum_{\nu} C\begin{pmatrix}\mu_1 & \nu\\ \mu_6 & \mu_5\end{pmatrix}(z_2)\, C\begin{pmatrix}\nu & \mu_3\\ \mu_5 & \mu_4\end{pmatrix}(z_1z_2)\, C\begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_2\\ \nu & \mu_3\end{pmatrix}(z_1)\end{aligned}$$

を満足するということである。これは、$\check{R}$ が vertex 型の Yang–Baxter 方程式

$$\begin{aligned}&(1\otimes\check{R}(z_1))(\check{R}(z_1z_2)\otimes 1)(1\otimes\check{R}(z_2))\\ &\qquad=(\check{R}(z_2)\otimes 1)(1\otimes\check{R}(z_1z_2))(\check{R}(z_1)\otimes 1)\end{aligned}$$

を満たすことと、qVO の合成 $\{\Phi_{\mu_2}^{\nu}(z_1)\Phi_{\mu_1}^{\mu_2}(z_2)\Phi_{\lambda}^{\mu_1}(z_3)\mid \mu_1,\mu_2\in P_k,$ $(\nu,\mu_2),(\mu_2,\mu_1),(\mu_1,\lambda):\text{admissible}\}$ が互いに 1 次独立であることから従う。

2 次元の可解格子模型の言葉では、$\check{R}$ は vertex 模型の Boltzmann weight を、C は face 模型のそれを表しているため、関係式 $(*)$ を vertex–face 対応と呼んでいる。

3. vertex 模型 の 1D sum

柏原により量子展開環の crystal base が導入された。これは、標語的には U–module の $q=0$ での base ということができる。crystal base には upper と lower の 2 種類があるが、ここでは upper を扱うことにする。crystal base を復習する。M を integrable な U–module とし、M_λ を M のウェイト λ のウェイト空間とする。M 上に e_i, f_i をそれぞれ修正した $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ という operator を定義する。([3] Sect 2.3 を参照) この時、(L, B) が crystal base であるとは、次の条件が満たされることをいう。

(1) $M \simeq \mathbf{Q}(q) \otimes_A L, \quad A = \{f \in \mathbf{Q}(q) \mid \text{regular at } q = 0\}$

(2) BはL/qLの base

(3) $L = \bigoplus_{\lambda \in P} L_\lambda, \quad L_\lambda = L \cap M_\lambda$

$B = \bigsqcup_{\lambda \in P} B_\lambda, \quad B_\lambda = B \cap (L_\lambda / qL_\lambda)$

(4) $\tilde{e}_i L \subset L, \quad \tilde{f}_i L \subset L$

$\tilde{e}_i B \subset B \sqcup \{0\}, \quad \tilde{f}_i B \subset B \sqcup \{0\}$

(5) $b, b' \in B$に対し, $\quad b' = \tilde{f}_i b \iff b = \tilde{e}_i b'$

L, B はそれぞれ、M の crystal lattice, crystal と呼ばれる。既約最高ウェイト表現 $V(\lambda)$ に対しては、crystal base が存在することが [5] で証明されている。それを $(L(\lambda), B(\lambda))$ と書く。crystal base は U'–module に対しても定義することができる。今、固定している U'–module V の crystal base の存在を仮定し、それを (L, B) とおく。

ここ数年来の可解格子模型の研究により、いくつかの $(\mathfrak{g}, V)$ に対し、次のようなことが observe されていた。([6] を参照)

Observation. $\eta \in P_N$ を固定する時、η から V の *crystal の sequence*

$$p_{gr} = \left(p_{gr}(n)\right)_{n \geq 1}, \quad p_{gr}(n) \in B$$

が定まる。H を次から決まる整数値の関数とする。

$$\check{R}(z)|_{q=0}(b_1 \otimes b_2) = z^{-H(b_1 \otimes b_2)} b_1 \otimes b_2$$

さらに、α を *level* N の（*dominant* とは限らない）$\mathbf{Z}\Lambda_0 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}\Lambda_l$ 内のウェイトとし、

$$\mathcal{P}(\eta; B) = \{p = \big(p(n)\big)_{n\geq 1} \mid p(n) \in B, p(n) = p_{gr}(n)\,(n \gg 1)\}$$

$$\mathcal{P}(\eta; B)_\alpha = \{p \in \mathcal{P}(\eta; B) \mid \eta + \sum_{k=1}^{\infty}\big(af(wt\,p(k)) - af(wt\,p_{gr}(k))\big) = \alpha\}$$

$$\omega(p) = \sum_{k=1}^{\infty} k\big(H(p(k+1) \otimes p(k)) - H(p_{gr}(k+1) \otimes p_{gr}(k))\big)$$

とする時、次が成立する。

$$\sum_{p \in \mathcal{P}(\eta; B)_\alpha} q^{\omega(p)} = \sum_n \dim V(\eta)_{\alpha - n\delta} q^n$$

左辺は 1 dimensional configuration sum (1D sum), 右辺は string function と呼ばれる量である。また、$\mathcal{P}(\eta; B)$ の元は *path* と呼ばれる。

このような現象がいつ起こるのかが問題になるが、[2] において、V の crystal が perfect（定義は [2] Def 4.6.1）という条件を満たしている時は上が成立することが証明されている。もう少し正確に述べると、

定理 [2]. *B が perfect という仮定のもとで、次の crystal の同型が存在する。*

$$B(\eta) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}(\eta; B)$$

また、path p の weight は次で与えられる。

$$wt\,(p) = \eta + \sum_{k=1}^{\infty}\big(af(wt\,p(k)) - af(wt\,p_{gr}(k))\big) - \omega(p)\delta$$

Observation において、最初に固定した特別な path p_{gr} は $B(\eta)$ の最高ウェイトの crystal に対応している。

$$B(\eta) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}(\eta; B)$$
$$|\eta\rangle \mapsto p_{gr}$$

Observation で述べたことは、この定理の帰結である。

4. face 模型 の 1D sum

vertex 模型 の 1 D sum が B perfect という条件のもとで string function を与えることは上で見た。これと対応する主張は face 模型 にもある。まず、前章の path に対応するものとして、restricted path を定義する。

$\xi \in P_{k-N}, \eta \in P_N$ に対して $a \in \mathcal{P}_{res}(\xi, \eta; B)$ とは、次の条件が成り立つことをいう。

(1) a は P_k の元の sequence, i.e. $a = \big(a(n)\big)_{n \geq 0}, a(n) \in P_k$.
(2) $\mathrm{wt}\, p(n) = cl(a(n) - a(n-1))$ となる $p \in \mathcal{P}(\eta; B)$ が存在する。
(3) $(a(n), a(n-1))$ は admissible, i.e. $\Phi_{a(n-1)}^{a(n)}(z)$ が存在。
(4) $a(0) = \xi + \eta + \sum_{k=1}^{\infty}\big(af(\mathrm{wt}\, p(k)) - af(\mathrm{wt}\, p_{gr}(k))\big)$.

対応する observation は次のようなものである。(たとえば [6] の Sect 4 を参照)

Observation. まず、$\xi \in P_{k-N}, \eta \in P_N$ に対し、(ξ, η) からきまる $a_{gr} = \big(a_{gr}(n)\big)_{n \geq 0}$ が存在する。$\overline{H}$ を次より定まる関数とする。

$$C\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 \\ \mu_1' & \mu_2 \end{pmatrix}(z)\Bigg|_{q=0} = \delta_{\mu_1 \mu_1'} z^{\Delta_{\mu_0} + \Delta_{\mu_2} - 2\Delta_{\mu_1} - \overline{H}(\mu_0, \mu_1, \mu_2)}$$

さらに、

$$\big(M_{\xi\eta}\big)_\alpha = \{u \in V(\xi) \otimes V(\eta) \mid e_i u = 0\, \forall i, \mathrm{wt}\, u = \alpha\}$$

$$\overline{\omega}(a) = \sum_{k=1}^{\infty} k\big(\overline{H}(a(k-1), a(k), a(k+1)) - \overline{H}(a_{gr}(k-1), a_{gr}(k), a_{gr}(k+1))\big)$$

とおく時、$\lambda \in P_k$ に対して、

$$\sum_{a \in \mathcal{P}_{res}(\xi, \eta; B), a(0) = \lambda} q^{\overline{\omega}(a)} = \sum_n \dim\big(M_{\xi\eta}\big)_{\lambda - n\delta} q^n$$

が成立する。

上式で左辺は face 模型 の 1D sum、右辺は指標の分岐係数と呼ばれているものである。

さて、我々の主張は次である。

定理. B が *perfect* という仮定のもとで上は正しい。

この主張は次の命題達より従う。

命題 1.

$$\overline{H}(\mu_0, \mu_1, \mu_2) = H(b_2 \otimes b_1)$$

ここで、b_1, b_2 は $wt\, b_1 = cl(\mu_0 - \mu_1), wt\, b_2 = cl(\mu_1 - \mu_2)$ により定まる B の元である。

証明は、vertex–face 対応のところで $q = 0$ とし、次の補題を用いる。

補題. 適当な qVO の正規化のもとで、

$$\widetilde{\Phi}_\lambda^\mu(z)|\lambda\rangle = |\mu\rangle \otimes b + O(q) \quad \text{for some } b \in B$$

が成立する。

標語的にいえば、'qVO は crystal lattice を保存する' ということ。

命題 2.

$$High(\xi, \eta) = \{b \otimes b' \in B(\xi) \otimes B(\eta) \,|.\tilde{e}_i(b \otimes b') = 0\, \forall i\}$$

とおくと、

$$\mathcal{P}_{res}(\xi, \eta; B) \xrightarrow{\sim} High(\xi, \eta)$$

なる対応がある。この対応のもとで、

$$a \mapsto |\xi\rangle \otimes b$$

ここで、b は $wt\, p(n) = cl(a(n) - a(n-1))$ なる path $p \in \mathcal{P}(\eta; B)$ に対応する $B(\eta)$ の元である。よって、a のウェイトは

$$wt\, a = a(0) - \omega(p)\delta$$

で与えられる。

本稿では、話を簡単にするため、U'–module V の weight multiplicity は高々 1 であるとしてきた。そうでない場合の formulation については [3] を参照していただきたい。

[参考文献]

[1] I.B.Frenkel and N.Yu.Reshetikhin, Quantum affine algebras and holonomic q-difference equations, *Commun. Math. Phys.* **146** (1992) 1–60.

[2] S.-J.Kang, M.Kashiwara, K.C.Misra, T.Miwa, T.Nakashima and A.Nakayashiki, Affine crystals and vertex models, *Int. J. Mod. Phys. A* **7** suppl. 1A (1992) 449–484.

[3] E.Date, M.Jimbo, M.Okado, Crystal base and q–vertex operators, to appear in *Commun. Math. Phys.*

[4] V.G.Kac, *Infinite dimensional Lie algebras, 3rd ed.* Cambridge University Press, Cambridge 1990.

[5] M.Kashiwara, On crystal bases of the q-analog of universal enveloping algebras, *Duke Math. J.* **63** (1991) 465–516.

[6] E.Date, M.Jimbo, A.Kuniba, T.Miwa and M.Okado, One–dimensional configuration sums in vertex models and affine Lie algebra characters, *Lett. Math. Phys.* **17** (1989) 69–77.